Construção axiomática do conjunto dos Números Naturais

Sandro Marcos Guzzo - UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná

(*Recebido em 13/11/2023. Aceito em 07/12/2023. Publicado em 20/12/2023*)

Resumo: A construção dos conjuntos numéricos é um assunto clássico na matemática, bem como o estudo das propriedades das operações definidas sobre estes conjuntos. Em geral, em um primeiro curso de álgebra e/ou de análise real, comumento oferecido aos alunos dos cursos de graduação em matemática, os estudantes se familiarizam com a construção dos conjuntos dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais. Mas a construção dos números naturais, normalmente não é apresentada. Nosso trabalho consiste em definir ou construir o conjunto dos números naturais. Tal construção será feita a partir dos axiomas de Peano. Nosso trabalho é definir um conjunto denotado por $\mathbb{N}$, duas operações (adição e multiplicação), uma relação de ordem, e provar as principais propriedades destas operações e desta relação, neste conjunto.

Palavras-chave: Axiomas de Peano; Conjunto dos números naturais.

1 Introdução

A construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ é parte da ementa das disciplinas de álgebra e/ou análise real de muitos cursos de graduação em matemática. Assumindo a existência do conjunto dos números naturais, pode-se construir o conjunto dos números inteiros, e verificar que este novo conjunto é um anel de integridade sob as operações de adição e multiplicação nele definidas. De posse do conjunto dos números inteiros pode-se construir o conjunto dos números racionais, e verificar que este novo conjunto é um corpo sob as operações de adição e multiplicação. A abordagem clássica para estas duas construções é o uso de classes de equivalência.

O conjunto dos números reais por sua vez, pode ser construído a partir dos números racionais. Uma das mais tradicionais abordagens é o método dos cortes de Dedekind. Nesta abordagem recomendamos Guidorizzi (2001). Outra abordagem bastante comum é o método das sequências de Cauchy. Nesta abordagem recomendamos Monteiro (1978). Os números reais ainda podem ser construídos diretamente do conjunto dos números inteiros pelo método dos quase-homomorfismos. Nesta abordagem recomendamos Street (1985).

Como mencionado anteriormente, estas construções partem de um ponto em comum que é o conhecimento de um conjunto primitivo, o conunto dos números naturais, o qual deseja-se melhorar a estrutura. O conjunto dos números naturais por sua vez também pode ser "construído".

Este é o objetivo deste trabalho: axiomatizar o conjunto dos números naturais. Pretendemos ainda definir em tal conjunto as operações de adição e multiplicação, bem como uma relação de ordem e demonstrar propriedades importantes envolvendo essas operações e a relação.

Propriedades estas que acabam por embasar a construção dos demais conjuntos numéricos anteriormente citados. O procedimento que adotaremos neste texto é o sugerido por Sah (1967).

2 Construção de $\mathbb{N}$

Começamos nosso trabalho postulando a existência de um conjunto que satisfaz certas propriedades axiomáticas. Tais axiomas são conhecidos como axiomas de Peano.

Postulado 1. Postulamos a existência de um conjunto $\mathcal{P}$, e de uma aplicação $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, que satisfazem os seguintes axiomas:

$\mathbf{P_i}$ (axioma da infinidade) A aplicação s é injetiva mas não sobrejetiva.

$\mathbf{P_{ii}}$ (axioma da indução) Se $S \subset \mathcal{P}$ com $S \not\subset s(\mathcal{P})$ e $s(S) \subset S$, então $S = \mathcal{P}$.

Observe que da não sobrejetividade de s segue que existe (pelo menos) um elemento em $\mathcal{P}$ que não está em $s(\mathcal{P})$. Isto significa que $\mathcal{P} - s(\mathcal{P})$ é não vazio, e portanto o próprio conjunto $\mathcal{P}$ é não vazio. Também, da injetividade de s, temos uma bijeção entre $\mathcal{P}$ e $s(\mathcal{P}) \subsetneq \mathcal{P}$. Levando em conta que não pode haver bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria dele, isto acarreta que o conjunto $\mathcal{P}$ é infinito. Daí o fato de o axioma $\mathbf{P_i}$ ser conhecido como axioma da infinidade.

A aplicação s associada a $\mathcal{P}$ é chamada aplicação sucessor, e o elemento $s(x) \in \mathcal{P}$ é dito elemento sucessor do elemento $x \in \mathcal{P}$. Como $\mathcal{P} - s(\mathcal{P})$ é não vazio existe $x \in \mathcal{P}$ de forma que $x \notin s(\mathcal{P})$, isto é, existe uma elemento de $\mathcal{P}$ que não é sucessor de elemento algum de $\mathcal{P}$. Na Proposição que segue, vamos demonstrar que tal elemento é único.

Proposição 1. *O conjunto $\mathcal{P} - s(\mathcal{P})$ possui um único elemento.*

Prova. Seja $e \in \mathcal{P} - s(\mathcal{P})$, isto é, $e \in \mathcal{P}$ e $e \notin s(\mathcal{P})$, e consideremos o conjunto

$$S = \{e\} \cup s(\mathcal{P}).$$

Assim, como $e \in \mathcal{P}$ e $s(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, temos que $S \subset \mathcal{P}$. Por outro lado, $S \not\subset s(\mathcal{P})$ já que $e \in S$ e $e \notin s(\mathcal{P})$. Vamos mostrar que $s(S) \subset S$ e, para isto, seja $y = s(x) \in s(S)$ para algum $x \in S$. Como $x \in S$, então $x = e$ ou $x \in s(\mathcal{P})$. Se $x = e$ então $x \in \mathcal{P}$ e $y = s(x) \in s(\mathcal{P}) \subset S$. Por outro lado, se $x \in s(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, então também $s(x) \in s(\mathcal{P}) \subset S$. Segue que $s(S) \subset S$ e do axioma $\mathbf{P_{ii}}$ temos $S = \mathcal{P}$, isto é, $\mathcal{P} = \{e\} \cup s(\mathcal{P})$ e portanto existe um único elemento que está em $\mathcal{P}$ e que não está em $s(\mathcal{P})$, o elemento e. $\square$

O elemento e da proposição anterior, será deste ponto em diante chamado de zero de $\mathcal{P}$, e denotado por 0. É o único elemento que não é sucessor de nenhum elemento de $\mathcal{P}$, isto é, o único elemento que pertence ao conjunto $\mathcal{P} - s(\mathcal{P})$.

Os axiomas $\mathbf{P_i}$ e $\mathbf{P_{ii}}$ podem ser substituídos por axiomas alternativos (mas equivalentes), para agora contemplar a existência (e unicidade) do elemento $0 \in \mathcal{P} - s(\mathcal{P})$.

Postulado 2. Postulamos a existência de um conjunto $\mathcal{P}$, com um elemento $0 \in \mathcal{P}$, e uma aplicação $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, satisfazendo

$\mathbf{P_1}$) $0 \notin s(\mathcal{P})$.

$\mathbf{P_2}$) s é injetiva.

$\mathbf{P_3}$) Se $S \subset \mathcal{P}$ com $0 \in S$ e $s(S) \subset S$, então $S = \mathcal{P}$.

A Proposição 2 demonstra a equivalência entre os postulados 1 e 2.

Proposição 2. *Os postulados 1 e 2 são equivalentes.*

Prova. Suponha então válidos $\mathbf{P_i}$ e $\mathbf{P_{ii}}$. $\mathbf{P_2}$ é consequência imediata de $\mathbf{P_i}$. A proposição 1 garante $\mathbf{P_1}$. Para mostrar $\mathbf{P_3}$, seja $S \subset \mathcal{P}$ tal que $0 \in S$ e $s(S) \subset S$. Então como $0 \in S$ e $0 \notin s(\mathcal{P})$ então $S \not\subset s(\mathcal{P})$. Então temos $S \subset \mathcal{P}$ com $S \not\subset s(\mathcal{P})$ e $s(S) \subset S$, e do axioma $\mathbf{P_{ii}}$ temos que $S = \mathcal{P}$, o que prova $\mathbf{P_3}$.

Suponha agora $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$ válidos. De $\mathbf{P_2}$, s é injetiva e como $0 \in \mathcal{P}$ com $0 \notin s(\mathcal{P})$ temos que $\mathcal{P} \not\subset s(\mathcal{P})$ donde s não é sobrejetiva, e isto garante $\mathbf{P_i}$. Para mostrar $\mathbf{P_{ii}}$, seja $S \subset \mathcal{P}$ com $S \not\subset s(\mathcal{P})$ e $s(S) \subset S$. Como $S \not\subset s(\mathcal{P})$ então existe $x \in S \subset \mathcal{P}$ com $x \notin s(\mathcal{P})$ e assim, $x \in \mathcal{P} - s(\mathcal{P})$. Mas o único elemento de $\mathcal{P}$ que não está em $s(\mathcal{P})$ é 0, donde $x = 0$. Assim, $S \subset \mathcal{P}$, com $x = 0 \in S$ e $s(S) \subset S$. De $\mathbf{P_3}$ temos que $S = \mathcal{P}$, o que prova $\mathbf{P_{ii}}$. □

Um fato importante é que não são únicos o conjunto $\mathcal{P}$ e a aplicação s, satisfazendo o postulado 2, e consequentemente o postulado 1. Como exemplo citamos os pares de conjuntos $\mathcal{P}$ e aplicações s,

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \\ s(n) = n + 2, \quad n \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

e também

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\} \\ s(n) = 10 \cdot n, \quad n \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Claro que estes exemplos são apenas sugestivos pois ainda não definimos a adição de números naturais, usada na definição de s no primeiro exemplo, e nem a multiplicação usada na definição de s no segundo exemplo. Observe que, no segundo exemplo, $0 \notin \mathcal{P}$ mas isto não é um problema, porque por nossa convenção, 0 é o elemento que não é sucessor de ninguém. Neste caso, este elemento ainda existe porém é o elemento 1.

Dentre todos os conjuntos e aplicações que satisfazem os axiomas de Peano, escolhemos um destes conjuntos e uma destas aplicações e deste ponto em diante os citaremos como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e a aplicação sucessor s. O conjunto $\mathbb{N}^* = s(\mathbb{N})$ é chamado de conjunto dos números naturais positivos. O número 0 é o (único) número natural que satisfaz $0 \in \mathbb{N} - s(\mathbb{N})$.

3 Adição em $\mathbb{N}$ e suas propriedades

Vamos agora dotar este conjunto de uma operação, que chamaremos de adição em $\mathbb{N}$, e provar algumas de suas importantes propriedades. Como $\mathbb{N} = \{0\} \cup s(\mathbb{N})$ então vamos definir a adição sobre $\mathbb{N}$ definindo indutivamente, primeiro sobre $\{0\}$ e depois sobre elementos de $s(\mathbb{N})$.

Definição 3. A adição em $\mathbb{N}$ é a operação $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sendo que escrevemos $m + n$ para designar $+(m, n)$, que satisfaz

i) $0 + n = n$,

ii) $s(m) + n = s(m + n)$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

O elemento $m + n = +(m, n) \in \mathbb{N}$ é chamado de soma de m com n. Nos resultados que se seguem, mostraremos que, embora $\mathbb{N}$ não seja um grupo, a adição possui elemento neutro, é comutativa, associativa e vale a lei do cancelamento.

Teorema 4. *A adição em $\mathbb{N}$ admite elemento neutro, isto é, existe $e \in \mathbb{N}$, tal que $e+a = a = a+e$ para qualquer $a \in \mathbb{N}$.*

Prova. O elemento neutro x da adição, se existir deve ser único, e deve satisfazer $x+a = a = a+x$ para qualquer $a \in \mathbb{N}$. Desta forma, o item (i) da definição da adição, nos diz que se algum elemento neutro existir, este elemento deve ser 0. Vamos então mostrar que 0 satisfaz as duas igualdades.

Claramente o próprio item (i) da definição da adição garante que $0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$, e então vamos mostrar a segunda igualdade. Seja $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m = m + 0\}$.

Naturalmente $S \subset \mathbb{N}$ com $0 \in S$. Seja agora $y = s(x) \in s(S)$ para algum $x \in S$. Como $x \in S$, temos $x = x + 0$ e disto decorre que $y + 0 = s(x) + 0 = s(x + 0) = s(x) = y$, donde $y \in S$ também. Assim $s(S) \subset S$, e do axioma $\mathbf{P_3}$ segue que $S = \mathbb{N}$. Logo, $0 + m = m = m + 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e então 0 é o elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$. □

Observe que tradicionalmente seríamos levados a provar primeiro a comutatividade da adição para não precisar provar as duas igualdades no teorema anterior. Entretanto como veremos adiante, para provar a comutatividade da adição, precisaremos da existência do elemento neutro bem como da associatividade da adição.

Teorema 5. *A adição em $\mathbb{N}$ é associativa, isto é, $(x + y) + z = x + (y + z)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$.*

Prova. Seja $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m + (a + b) = (m + a) + b \quad \text{para todos} \quad a, b \in \mathbb{N}\}$. Temos que $S \subset \mathbb{N}$ e $0 \in S$ já que $0 + (a + b) = a + b = (0 + a) + b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Seja agora $y = s(x) \in s(S)$ para algum $x \in S$. Então para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ temos $x + (a + b) = (x + a) + b$ e também

$$y + (a + b) = s(x) + (a + b) = s(x + (a + b))$$

$$= s((x+a)+b) = s(x+a)+b = (s(x)+a)+b = (y+a)+b.$$

Segue que $y \in S$, o que mostra que $s(S) \subset S$. Do axioma $\mathbf{P_3}$ temos que $S = \mathbb{N}$ e portanto todo $m \in \mathbb{N}$ satisfaz $m + (a+b) = (m+a)+b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Fica mostrada a associatividade da adição. $\square$

Sendo válida a associatividade da adição em $\mathbb{N}$, a partir de agora escreveremos simplesmente $m+a+b$, para indicar $m+(a+b)$ ou $(m+a)+b$.

Lema 6. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $s(n) = n + s(0)$.*

Prova. Seja $S = \{n \in \mathbb{N}; \quad s(n) = n + s(0)\}$. Então $S \subset \mathbb{N}$ e, como $0 + s(0) = s(0)$, temos $0 \in S$. Dado agora $y = s(x) \in s(S)$, para $x \in S$, temos que $s(x) = x + s(0)$, e disto obtemos

$$s(y) = s(s(x)) = s(x + s(0)) = s(x) + s(0) = y + s(0),$$

e assim, $y = s(x) \in S$, donde $s(S) \subset S$. Segue de $\mathbf{P_3}$ que $S = \mathbb{N}$, e portanto $s(n) = n + s(0)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 7. *A adição em $\mathbb{N}$ é comutativa, isto é, $m+n = n+m$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Seja $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m + a = a + m \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{N}\}$. Claramente $S \subset \mathbb{N}$ e pelo Teorema 4 temos $0 \in S$. Dado $y = s(x) \in s(S)$ para algum $x \in S$, então $x + a = a + x$ para todo $a \in \mathbb{N}$, e usando o lema 6, temos

$$\begin{aligned} y + a &= s(x) + a = s(x+a) \\ &= s(a+x) = s(a) + x \\ &= a + s(0) + x = a + s(0+x) = a + s(x) = a + y. \end{aligned}$$

Então $y \in S$, o que mostra que $s(S) \subset S$ e pelo axioma $\mathbf{P_3}$ temos que $S = \mathbb{N}$. Portanto a adição é comutativa em $\mathbb{N}$. $\square$

Mostraremos agora a validade da lei do cancelamento para a adição em $\mathbb{N}$.

Teorema 8. *Para quaisquer $x, y, m \in \mathbb{N}$, se $x + m = y + m$ então $x = y$.*

Prova. Consideremos o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; \quad a + m = b + m \quad \Rightarrow \quad a = b, \quad \text{para quaisquer} \quad a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Temos $S \subset \mathbb{N}$ com $0 \in S$ já que, se $a + 0 = b + 0$ então $a = b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Agora, tomemos $y = s(x) \in s(S)$ para $x \in S$. Queremos mostrar que $y = s(x) \in S$ e para isto suponhamos que $a + s(x) = b + s(x)$ para $a, b \in \mathbb{N}$ arbitrários. Então disto decorre que

$$s(x+a) = s(x) + a = a + s(x) = b + s(x) = s(x) + b = s(x+b).$$

Da injetividade de s segue que $x + a = x + b$ e como $x \in S$ então segue que $a = b$. Desta forma $y = s(x) \in S$, e do axioma $\mathbf{P_3}$ temos que $S = \mathbb{N}$, o que significa que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, se $a + m = b + m$ então $a = b$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{N}$. $\square$

4 Multiplicação em $\mathbb{N}$ e suas propriedades

Definiremos agora uma outra operação em $\mathbb{N}$, que chamaremos de multiplicação, e provaremos algumas de suas propriedades. Novamente, como $\mathbb{N} = \{0\} \cup s(\mathbb{N})$ então definiremos a multiplicação em $\mathbb{N}$ indutivamente, definindo-a primeiro sobre $\{0\}$ e depois sobre os elementos de $s(\mathbb{N})$.

Definição 9. A multiplicação é a operação $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sendo que escrevemos $m \cdot n$ ou simplesmente mn para indicar $\cdot(m, n)$, que satisfaz

i) $0 \cdot n = 0$,

ii) $s(m) \cdot n = (m \cdot n) + n$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

O elemento $mn = \cdot(m, n) \in \mathbb{N}$ é chamado de produto de m com n. Para o item (ii) vamos supor, deste ponto em diante, que a multiplicação tem preferência sobre a adição, e então escreveremos simplesmente $mn + n$ em vez de $(mn) + n$.

A multiplicação possui propriedades similares às da adição. Entretanto, as demonstrações destas propriedades para a multiplicação são mais extensas. A multiplicação possui elemento neutro, é comutativa, associativa e vale a lei do cancelamento (com restrições). A prova da existência do elemento neutro precisará de um lema auxiliar.

Lema 10. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.*

Prova. Procederemos pela contrapositiva. Suponha que $m \neq 0$ e $n \neq 0$, ou ainda, $m, n \in s(\mathbb{N})$. Existem então $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $m = s(x)$ e $n = s(y)$. Assim, das definições de multiplicação e de adição,

$$mn = s(x)s(y) = xs(y) + s(y) = s(y) + xs(y) = s(y + xs(y)),$$

e então, $mn \in s(\mathbb{N})$ o que garante que $mn \neq 0$. □

O próximo Teorema trata da busca por um elemnto neutro $e \in \mathbb{N}$ para a multiplicação. Um elemento que deve satisfazer $en = n = ne$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos tecer alguns comentários na tentativa de intuir quem deveria ser este elemento e. Sabemos que $0 \cdot n = 0$, e portanto na procura por um elemento $e \in \mathbb{N}$ que satisfaz $en = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que e não pode ser o elemento 0. Então $e \in s(\mathbb{N})$, e desta forma $e = s(x)$ para algum $x \in \mathbb{N}$. Sendo assim, x deverá satisfazer $s(x)n = n$, ou ainda $xn + n = n = 0 + n$. Mas pela lei do cancelamento para a adição, x deve satisfazer $xn = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do lema anterior, o único $x \in \mathbb{N}$ que satisfaz essa igualdade deve ser $x = 0$, e desta forma $e = s(x) = s(0)$.

Teorema 11. *Existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $en = n = ne$ para todos $n \in \mathbb{N}$;*

Prova. Mostraremos que $e = s(0)$ satisfaz as duas igualdades desejadas. De fato, $s(0)n = 0 \cdot n + n = 0 + n = n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Agora, para mostrar a segunda igualdade, seja $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad ms(0) = m\}$.

Desta forma, $S \subset \mathbb{N}$ e também $0 \in S$, pois $0 \cdot s(0) = 0$. Dado $y = s(x) \in s(S)$, para algum $x \in S$, temos então $xs(0) = x$ e usando também o Lema 6 decorre que,

$$ys(0) = s(x)s(0) = xs(0) + s(0) = x + s(0) = s(x) = y.$$

Então temos que $y \in S$, o que mostra que $s(S) \subset S$ e do Axioma $\mathbf{P_3}$, $S = \mathbb{N}$. Temos assim que $ms(0) = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

O elemento $s(0) \in \mathbb{N}$ é então o elemento neutro da multiplicação, e naturalmente este é o elemento sucessor do elemento $0 \in \mathbb{N}$. Chamaremos o elemento $s(0)$ de unidade do conjunto $\mathbb{N}$ e representaremos este elemento de agora em diante por 1. Desta forma, temos $1 = s(0)$ e também $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ para qualquer $a \in \mathbb{N}$.

Com a notação $s(0) = 1$ e o Lema 6 temos imediatamente que $s(x) = x + s(0) = x + 1$, para qualquer $x \in \mathbb{N}$. De outra forma, o sucessor de um número natural x é o número natural $x + 1$.

Queremos agora mostrar que a multiplicação é associativa e comutativa. Para provar isto, precisaremos primeiro da distributividade da multiplicação em relação à adição. Esta por sua vez utilizará um lema auxiliar. Este lema refere-se ao produto por 0 pela esquerda. A definição de multiplicação já garante em seu item (i) que $0 \cdot a = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{N}$. Mas como ainda não mostramos a comutatividade da multiplicação, precisaremos provar também que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Lema 12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $n \cdot 0 = 0$.*

Prova. Consideremos o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m \cdot 0 = 0\}$.

Temos que $S \subset \mathbb{N}$ e como $0 \cdot 0 = 0$ então $0 \in S$. Também seja $y = s(x) \in s(S)$ para $x \in S$. Então $x \cdot 0 = 0$ e decorre disto que $y \cdot 0 = s(x) \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. Segue que $y \in S$ e que $s(S) \subset S$. Pelo Axioma $\mathbf{P_3}$ temos $S = \mathbb{N}$, donde $m \cdot 0 = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 13. *Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, temos $x(y+z) = xy+xz$ e também $(y+z)x = yx+zx$, isto é, a operação multiplicação é distributiva com relação à operação adição em $\mathbb{N}$.*

Prova. Consideremos o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m(a + b) = ma + mb, \quad \text{para todos} \quad a, b \in \mathbb{N}\}$.

Claro que $S \subset \mathbb{N}$ e que $0 \in S$ já que $0 \cdot (a + b) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Agora suponha $y = s(x) \in s(S)$, para $x \in S$. Então $x(a + b) = xa + xb$, e assim temos

$$\begin{aligned} y(a + b) &= s(x)(a + b) = x(a + b) + (a + b) \\ &= xa + xb + a + b \\ &= xa + a + xb + b \\ &= s(x)a + s(x)b = ya + yb. \end{aligned}$$

Segue que $y \in S$ e então $s(S) \subset S$. Do axioma $\mathbf{P_3}$ temos $S = \mathbb{N}$ e a distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição. Para provar a distributividade à direita, consideremos o conjunto $T = \{m \in \mathbb{N}; \quad (a+b)m = am + bm, \quad \text{para todos} \quad a, b \in \mathbb{N}\}$.

Então $T \subset \mathbb{N}$ e usando o Lema 12 temos que $(a+b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, e então $0 \in T$. Agora suponha $y = s(x) \in s(T)$ para $x \in T$. Então $(a+b)x = ax + bx$ e usando o fato que $y = s(x) = x + 1$ e a distributividade pela esquerda já provada, temos

$$\begin{aligned}
(a+b)y &= (a+b)s(x) = (a+b)(x+1) \\
&= (a+b)x + (a+b) \cdot 1 \\
&= ax + bx + (a+b) \\
&= ax + a + bx + b \\
&= ax + a \cdot 1 + bx + b \cdot 1 \\
&= a(x+1) + b(x+1) = ay + by.
\end{aligned}$$

Temos então que $y \in T$, e por conseguinte $s(T) \subset T$. Do axioma $\mathbf{P_3}$ temos $T = \mathbb{N}$. A multiplicação é portanto distributiva também à direita em relação à adição. □

Teorema 14. *Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, temos $x(yz) = (xy)z$.*

Prova. Seja $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad m(ab) = (ma)b, \quad \text{para todos} \quad a, b \in \mathbb{N}\}$.

Temos que $S \subset \mathbb{N}$ e também $0 \in S$ pois $0 \cdot (ab) = 0 = 0 \cdot b = (0 \cdot a) \cdot b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Seja agora $y = s(x) \in s(S)$ com $x \in S$. Então para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ temos $x(ab) = (xa)b$ e disto temos

$$\begin{aligned}
y(ab) &= s(x)(ab) = x(ab) + ab \\
&= (xa)b + ab = (xa + a)b = (s(x)a)b = (ya)b.
\end{aligned}$$

Então $y \in S$ e $s(S) \subset S$. Do axioma $\mathbf{P_3}$ temos que $S = \mathbb{N}$ e fica provada a associatividade da multiplicação. □

Teorema 15. *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos $mn = nm$.*

Prova. Considerando $S = \{m \in \mathbb{N}; \quad ma = am, \quad \text{para todos} \quad a \in \mathbb{N}\}$, temos $S \subset \mathbb{N}$. Também, usando a definição da multiplicação e o lema 12, temos $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ para todo $a \in \mathbb{N}$, o que garante que $0 \in S$. Suponha agora $y = s(x) \in s(S)$ para $x \in S$. Então para todo $a \in \mathbb{N}$ temos $xa = ax$ e também

$$\begin{aligned}
ya &= s(x)a = xa + a \\
&= ax + a \cdot 1 = a(x+1) = as(x) = ay.
\end{aligned}$$

Segue que $y \in S$ e então $s(S) \subset S$. O axioma $\mathbf{P_3}$ garante que $S = \mathbb{N}$ e portanto $ma = am$ para todos $a, m \in \mathbb{N}$. □

5 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Conhecida a adição em $\mathbb{N}$ é possível definir em $\mathbb{N}$ uma relação de ordem (total). Definimos em $\mathbb{N}$, a relação $\leq$ dada por,

$$a \leq b, \quad \text{se e somente se,} \quad \text{existe} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad a + n = b.$$

Observe que na definição da relação $\leq$, usamos a existência de um elemento $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N} = \{0\} \cup s(\mathbb{N})$ então pode ocorrer que $n \in \{0\}$ ou $n \in s(\mathbb{N})$. Mas note que não podemos ter simultaneamente $n \in \{0\}$ e $n \in s(\mathbb{N})$ já que a união $\{0\} \cup s(\mathbb{N})$ é disjunta. Se $n = 0$ então claramente $a = b$. Se por outro lado tivermos $n \in s(\mathbb{N})$ então escrevemos $a < b$. Resumindo,

$$a < b, \quad \text{se e somente se,} \quad \text{existe} \quad n \in s(\mathbb{N}) \quad \text{tal que} \quad a + n = b.$$

Claramente podemos dizer que $a \leq b$, se e somente se, $a = b$ ou $a < b$, sendo que $a = b$ e $a < b$ são condições exclusivas uma da outra. A expressão $b \geq a$ é equivalente a $a \leq b$, e da mesma forma, a expressão $b > a$ é equivalente a $a < b$.

Vamos verificar primeiro que $\leq$ é de fato uma relação de ordem.

Proposição 16. *A relação $\leq$ é uma relação de ordem (parcial) em $\mathbb{N}$.*

Prova. Dado qualquer $a \in \mathbb{N}$, temos $a \leq a$, uma vez que $a + 0 = a$. Desta forma $\leq$ é reflexiva.

Dados $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então temos que existem $m, n \in \mathbb{N}$, que satisfazem $a + m = b$ e $b + n = a$. Assim, $a + m + n = b + n = a = a + 0$, e da lei do cancelamento em $\mathbb{N}$ (Teorema 8), segue que $m + n = 0$, donde $m + n \notin s(\mathbb{N})$. Vamos mostrar que $m \notin s(\mathbb{N})$. De fato, procedendo contrapositivamente se $m \in s(\mathbb{N})$ então $m = s(x)$ para algum $x \in \mathbb{N}$ e segue que $m + n = s(x) + n = s(x + n) \in s(\mathbb{N})$. Isto prova que $m \notin s(\mathbb{N})$ e como o único elemento de $\mathbb{N}$ que não pertence a $s(\mathbb{N})$ é 0, temos que $m = 0$. Desta forma, $b = a + m = a + 0 = a$, e a relação é anti-simétrica.

Dados agora $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a+m = b$ e $b + n = c$. Assim, $a + (m + n) = (a + m) + n = b + n = c$, e então $a \leq c$ já que $(m + n) \in \mathbb{N}$. Temos portanto a transitividade da relação $\leq$. $\square$

Queremos provar agora que esta ordem é total. Para isto usaremos um lema auxiliar.

Lema 17. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $n \leq s(n)$.*

Prova. Naturalmente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$n + s(0) = s(0) + n = s(0 + n) = s(n),$$

e como $s(0) \in s(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, então $n \leq s(n)$. $\square$

Proposição 18. *A relação de ordem $\leq$ é total em $\mathbb{N}$.*

Prova. Seja $a \in \mathbb{N}$ arbitrário, e considere o conjunto

$$S_a = \{n \in \mathbb{N}; \quad a \leq n \quad \text{ou} \quad n \leq a\}.$$

Então $S_a \subset \mathbb{N}$. Como $0 + a = a$ então $0 \leq a$ e com isto $0 \in S_a$. Mostraremos que $s(S_a) \subset S_a$. Seja $y = s(x) \in s(S_a)$ para algum $x \in S_a$. Desta forma, $x \leq a$ ou $a \leq x$.

Se $a \leq x$, como $x \leq s(x)$ então da transitividade de $\leq$ segue que $a \leq s(x)$ donde $s(x) \in S_a$, isto é, $y \in S_a$.

Se $x \leq a$ então $x + k = a$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $k = 0$ então não há o que mostrar pois daí $a = x$ e podemos utilizar o caso $a \leq x$. Se $k \neq 0$ então $k \in s(\mathbb{N})$, donde $k = s(m)$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Então $s(x) + m = s(x + m) = s(m + x) = s(m) + x = k + x = a$. Segue que $s(x) \leq a$ e então $s(x) \in S_a$, ou ainda, $y \in S_a$.

Em qualquer caso, temos $s(S_a) \subset S_a$. Segue do axioma $\mathbf{P_3}$ que $S_a = \mathbb{N}$. Assim, dados $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrários, temos que $m \in S_n$ e da definição de S_n, temos que $m \leq n$ ou $n \leq m$, e o conjunto $\mathbb{N}$ é totalmente ordenado. □

Nestes termos, dados $a, b \in \mathbb{N}$, temos $a \leq b$ ou $b \leq a$. Se considerarmos separadamente a possibilidade $a = b$, temos então a propriedade tricotômica da relação de ordem, isto é, dados $a, b \in \mathbb{N}$, ou $a = b$, ou $a < b$, ou $b < a$.

Neste ponto podemos revisitar o Lema 17, onde provamos que $n \leq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como já mencionado anteriormente, $n + 1 = s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $1 = s(0) \in s(\mathbb{N})$. Segue portanto da definição da relação $<$, que $n < s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consequência disso, o conjunto dos números naturais não possui um elemento máximo. De fato, dado qualquer número natural n sempre existe outro número natural (o sucessor de n) maior do que n.

A lei do cancelamento também é válida para a multiplicação, com uma certa restrição, como dito antes. Como sabemos que $0 \cdot x = 0 = 0 \cdot y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, isto nos diz que $ax = ay$ não pode garantir que $x = y$ no caso em que $a = 0$. Entretanto se $a \neq 0$ então podemos garantir este cancelamento. Este Teorema não pôde ser mencionado na seção anterior pois faz uso da relação de ordem.

Teorema 19. *Para quaisquer $a, x, y \in \mathbb{N}$, se $a \neq 0$ e $ax = ay$, então $x = y$.*

Prova. Supondo $a \neq 0$, então temos que $a \in s(\mathbb{N})$ e $a = s(m)$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Sejam também $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $ax = ay$. Como a relação de ordem em $\mathbb{N}$ é total, então temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Vamos analisar cada um dos casos.

Se $x \leq y$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + k = y$. Assim,

$$\begin{aligned} s(m) \cdot x = ax = ay &= a(x + k) \\ &= ax + ak = s(m) \cdot x + s(m) \cdot k. \end{aligned}$$

Da lei do cancelamento para a adição, temos que $s(m) \cdot k = 0$, e do lema 10, temos que obrigatoriamente $k = 0$, uma vez que $s(m) \neq 0$. Sendo assim, $y = x + k = x + 0 = x$.

Analogamente, se $y \leq x$ então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $y + l = x$. Então também

$$s(m) \cdot y = ay = ax = a(y + l) = s(m) \cdot y + s(m) \cdot l,$$

donde segue que $s(m) \cdot l = 0$ e como $s(m) \neq 0$ então $l = 0$. Logo, $x = y + l = y + 0 = y$, e isto encerra esta demonstração. □

Para finalizar esta seção mostraremos agora a compatibilidade das operações de adição e multiplicação para com a relação de ordem em $\mathbb{N}$. Isto significa que dados $a, b \in \mathbb{N}$ arbitrários, se $a \leq b$ então $a + m \leq b + m$, e também $am \leq bm$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 20. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ com $a \leq b$ então, $a + m \leq b + m$ e $am \leq bm$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.*

Prova. Sejam então $a, b \in \mathbb{N}$ com $a \leq b$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a + k = b$. Dado $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, usando a comutatividade e a associatividade da adição em $\mathbb{N}$, temos

$$(a + m) + k = (a + k) + m = b + m,$$

o que garante que $a + m \leq b + m$.

Também, usando a distributividade da multiplicação com relação à adição em $\mathbb{N}$, temos

$$am + km = (a + k)m = bm,$$

o que garante que $am \leq bm$ já que $km \in \mathbb{N}$. □

Conclusões

Como prentendido, construímos o conjunto dos números naturais usando os Axiomas de Peano. Definimos a adição, a multiplicação e uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$, além de provarmos as principais propriedades das operações de adição e multiplicação e da relação $\leq$.

Embora tenhamos considerado o número natural 0, é importante observar ao leitor, que alguns autores não consideram o número 0 como sendo um número natural. Isso não invalida a nossa construção. Entretanto, para os casos em que não se deseja incluir 0 como número natural, ajustes deste texto devem ser feitos. Neste caso, o número natural que não pertence ao conjunto $s(\mathbb{N})$ deve ser representado por 1. A adição e a multiplicação devem ser redefinidas colocando respectivamente $1 + n = s(n)$ e $1 \cdot n = n$. Cabe observar que neste caso, a adição não terá elemento neutro. O Lema 6 deve ser adaptado para provar que $s(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e os Teoremas 5, 7 e 8 continuam válidos bastando substituir 0 por 1 nas demonstrações. O Lema 10 fica sem efeito. No Teorema 11 basta colocar diretamente $e = 1$ na demonstração. O Lema 12 deve ser adaptado para provar que $n \cdot 1 = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e os Teoremas 13, 14 e 15 bastando praticamente substituir 0 por 1.

Referências

Guidorizzi, Hamilton L. *Um curso de cálculo.* Volume 1, 5^a edição, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

Monteiro, L. H. Jacy. *Elementos de Álgebra.* 2^a edição, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

Street, Ross. *An efficient construction of the real numbers.* Gazette of the Australian Mathematical Society **12** (1985) 57–58.

Sah, Chih-Han. *Abstract algebra.* New York: Academic Press, 1967.